模块三 导数常规题型

第 1 节 函数图象切线的计算（★★☆）

强化训练

1．（2023 • 全国乙卷（改）• ★）已知函数 $f(x)=(\frac{1}{x}+a)\ln(1+x)$．当 $a=-1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为_____.

答案： $(\ln 2)x+y-\ln 2=0$

解析： 当 $a=-1$ 时，$f(x)=(\frac{1}{x}-1)\ln(1+x)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+(\frac{1}{x}-1)\cdot\frac{1}{1+x}$，

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=-\ln 2$，故所求切线方程为 $y-0=(-\ln 2)(x-1)$，整理得：$(\ln 2)x+y-\ln 2=0$.

2．（2022 • 阜阳期末 • ★★）函数 $f(x)=\sin 2x+4\cos x$ 的图象在 $x=x_0$ 处切线斜率的最小值为（　　）

（A）-6　　（B）-5　　（C）2　　（D）3

答案： A

解析： 切线斜率的最小值即为导函数的最小值，由题意，$f'(x)=2\cos 2x-4\sin x=2(1-2\sin^2 x)-4\sin x$，将 $\sin x$ 看作整体，可换元化为二次函数求区间最值，

令 $t=\sin x$，则 $-1\le t\le 1$，且 $f'(x)=2(1-2t^2)-4t=-4t^2-4t+2=-4(t+\frac{1}{2})^2+3$，

所以当 $t=1$ 时，$f'(x)$ 取得最小值 -6，故选 A.

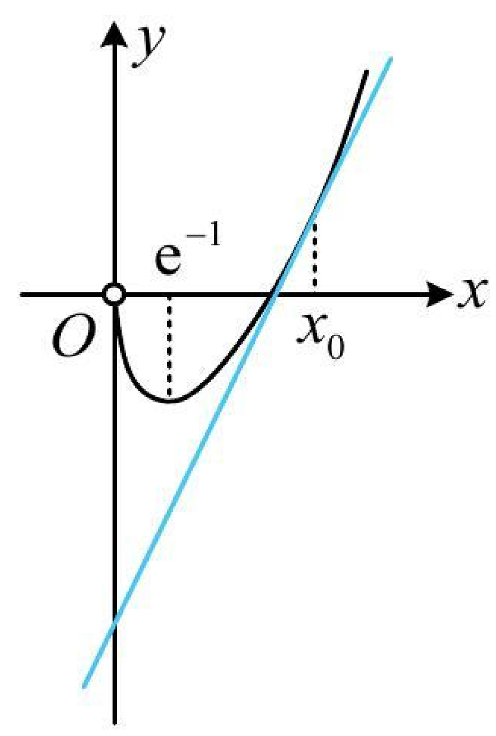
3．（2022 • 成都模拟 • ★★）直线 $y=kx-2$ 与曲线 $y=x\ln x$ 相切，则实数 $k=$_____.

答案： $1+\ln 2$

解析： 因为不知道切点，所以先设切点坐标，设切点为 $(x_0,x_0\ln x_0)$，由题意，$(x\ln x)'=1+\ln x$，

如图，应有 $\begin{cases}1+\ln x_0=k & ①(x_0\text{处的导数与切线斜率相等})\\ kx_0-2=x_0\ln x_0 & ②(x_0\text{处是切线和函数图象的交点})\end{cases}$，

将①代入②消去 k 得：$(1+\ln x_0)x_0-2=x_0\ln x_0$，解得：$x_0=2$，所以 $k=1+\ln 2$.



4．（2022 • 黄山模拟 • ★★★）若 $f(x)=\ln x$ 图象上 $(1,0)$ 处的切线与 $g(x)=\frac{\ln x+a}{x}(a\in\mathbf{R})$ 的图象也相切，则

$a=$_____.

答案：0

解析：$f'(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=1\Rightarrow f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线为 $y=x-1$，

该直线与 $g(x)$ 的图象也相切，这是已知切线求参的问题，用内容提要 3 的方法，

设 $y=x-1$ 与 $g(x)$ 的图象相切于 $x=x_0(x_0>0)$ 处，因为 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x-a}{x^2}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{1-\ln x_0-a}{x_0^2}=1 & ①\\ \dfrac{\ln x_0+a}{x_0}=x_0-1 & ②\end{cases}$，

由①可得 $a=1-\ln x_0-x_0^2$，代入②化简得：$2x_0^2-x_0-1=0$，解得：$x_0=1$ 或 $-\dfrac{1}{2}$（舍去），所以 $a=0$.

5.（2019•江苏卷•★★★）点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-\mathrm{e},-1)$，则点 A 的坐标是_____.

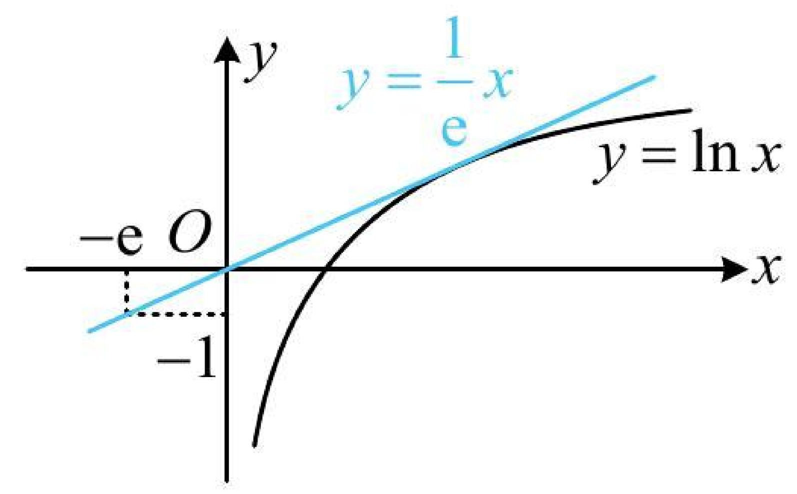
答案：$(\mathrm{e},1)$

解析：设 $A(x_0,\ln x_0)$，因为 $y'=\dfrac{1}{x}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 A 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，

将点 $(-\mathrm{e},-1)$ 代入得：$-1-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(-\mathrm{e}-x_0)$，整理得：$x_0\ln x_0=\mathrm{e}$①，

观察可得 $x_0=\mathrm{e}$ 是方程①的解，这个方程还有其它解吗？可以画图看看，

如图，过点 $(-\mathrm{e},-1)$ 只能作曲线 $y=\ln x$ 的 1 条切线，所以 $x_0=\mathrm{e}$ 是方程①的唯一解，故点 A 的坐标是 $(\mathrm{e},1)$.



6.（2022•新高考Ⅰ卷•★★★）若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围为_____.

答案：$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

解析：设切点为 $P(x_0,(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0})$，由题意，$y'=(x+a+1)\mathrm{e}^x$，

所以曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 在点 P 处的切线的方程为 $y-(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0}=(x_0+a+1)\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$ ①，

将原点 $(0,0)$ 代入①可得 $-(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0}=(x_0+a+1)\mathrm{e}^{x_0}\cdot(-x_0)$，整理得：$x_0^2+ax_0-a=0$，

所给曲线有两条过原点的切线等价于上述关于 x_0 的方程有两个实数解，

所以 $\Delta=a^2+4a>0$，解得：$a<-4$ 或 $a>0$.

7.（2022•亳州模拟•★★★）已知 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x-1}+\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在点 $(-\dfrac{1}{2},f(-\dfrac{1}{2}))$ 处的切线方程为_____.

答案：$y=2x+4$

解法 1：偶函数中，已知 $x>0$ 时的解析式，可先求出 $x<0$ 时的解析式，

因为 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时， $f(x)=e^{2x-1}+\frac{1}{x}$，所以当 $x<0$ 时， $f(x)=f(-x)=e^{-2x-1}-\frac{1}{x}$，

故 $f'(x)=-2e^{-2x-1}+\frac{1}{x^2}$，所以 $f(-\frac{1}{2})=3$， $f'(-\frac{1}{2})=2$，故所求切线方程为 $y-3=2[x-(-\frac{1}{2})]$，即 $y=2x+4$.

解法 2：也可直接由 $x>0$ 的解析式求 $f'(\frac{1}{2})$，再用偶函数的对称性得出 $f'(-\frac{1}{2})$，

由题意，当 $x>0$ 时， $f(x)=e^{2x-1}+\frac{1}{x}$， $f'(x)=2e^{2x-1}-\frac{1}{x^2}$，所以 $f'(\frac{1}{2})=-2$，

又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f'(-\frac{1}{2})=-f'(\frac{1}{2})=2$，（理由见本节例 1 变式 2 的反思）且 $f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=3$，

故所求切线方程为 $y-3=2[x-(-\frac{1}{2})]$，化简得： $y=2x+4$.

8.（★★★）已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x-1)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $x+y+2=0$，则 $f(-2)+f'(-2)=$______.

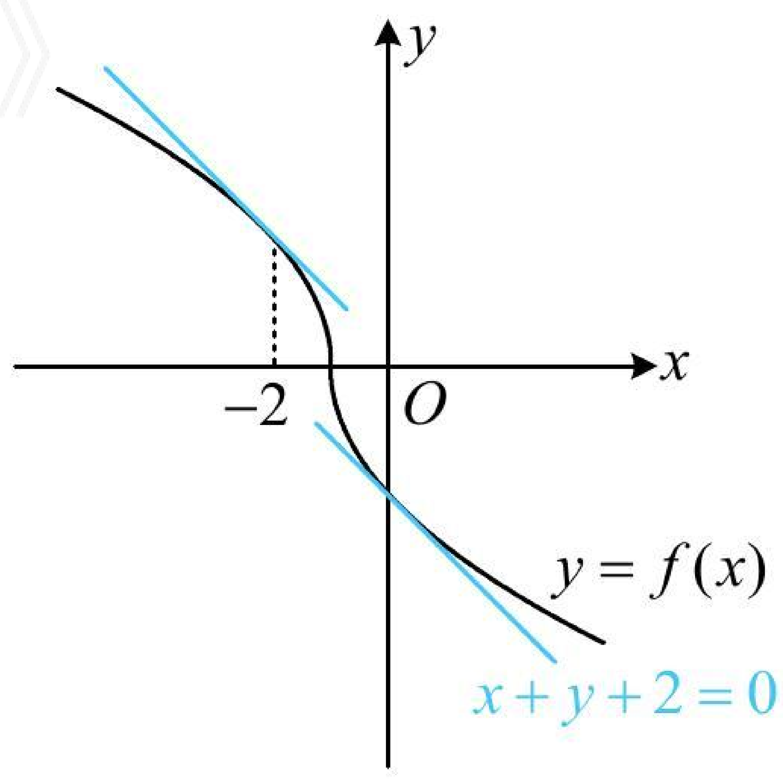
答案：1

解析： $f(x-1)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，

又 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $x+y+2=0$，所以 $f(0)=-2$， $f'(0)=-1$，

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，所以 $f(-2)=2$，（点 $(-2,f(-2))$ 和 $(0,f(0))$ 关于 $(-1,0)$ 对称）

且 $f'(-2)=-1$（关于 $(-1,0)$ 对称的位置的切线斜率相等，如图），故 $f(-2)+f'(-2)=1$.



9.（2022•深圳模拟•★★★）已知 $a>0$，若过点 $P(a,b)$ 可作曲线 $y=x^3$ 的三条切线，则（）

（A） $b<0$ （B） $0<b<a^3$ （C） $b>a^3$ （D） $b(b-a^3)=0$

答案：B

解法 1：不知道切点，可先设切点，设切点为 (t,t^3)，因为 $y'=3x^2$，所以切线方程为 $y-t^3=3t^2(x-t)$，

将点 (a,b) 代入整理得： $2t^3-3at^2+b=0$，故问题等价于关于 t 的方程 $2t^3-3at^2+b=0$ 有 3 个实数解，

接下来将 t 看成自变量，构造函数分析，设 $f(t)=2t^3-3at^2+b$，则 $f(t)$ 有 3 个零点，

又 $f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$ 且 $a>0$，所以 $f'(t)>0\Leftrightarrow t<0$ 或 $t>a$， $f'(t)<0\Leftrightarrow 0<t<a$，

故 $f(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上↗，在 $(0,a)$ 上↘，在 $(a,+\infty)$ 上↗，

要使 $f(t)$ 有 3 个零点，则 $f(t)$ 的大致图象如图 1，由图可知 $\begin{cases} f(0)=b>0 \\ f(a)=b-a^3<0 \end{cases}$，故 $0<b<a^3$.

解法 2：曲线 $y=x^3$ 和 x 轴将 y 轴右侧部分分成 5 个部分，直接作图观察，

当点 P 在曲线 $y=x^3$ 上方时，如图 2，过点 P 只能作 1 条切线，不合题意；

当点 P 在曲线 $y=x^3$ 上时，如图 3，过点 P 只能作 2 条切线，不合题意；

当点 P 在曲线 $y=x^3$ 与 x 轴之间时，如图 4，过点 P 可作 3 条切线，满足题意，

此时，点 P 的纵坐标 b 应大于 0 且小于 $y=x^3$ 在 $x=a$ 处的函数值，所以 $0<b<a^3$；

当点 P 在 x 轴上时，如图 5，过点 P 只能作 2 条切线，不合题意；

当点 P 在 x 轴下方时，如图 6，过点 P 只能作 1 条切线，不合题意.

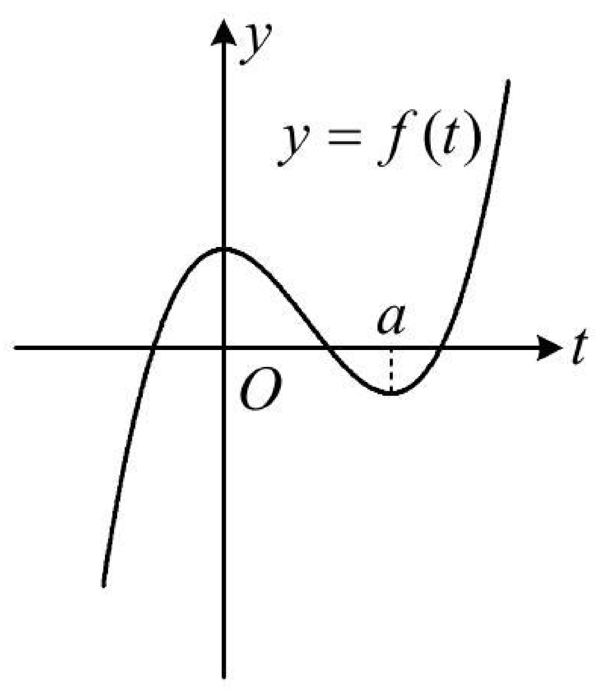


图1

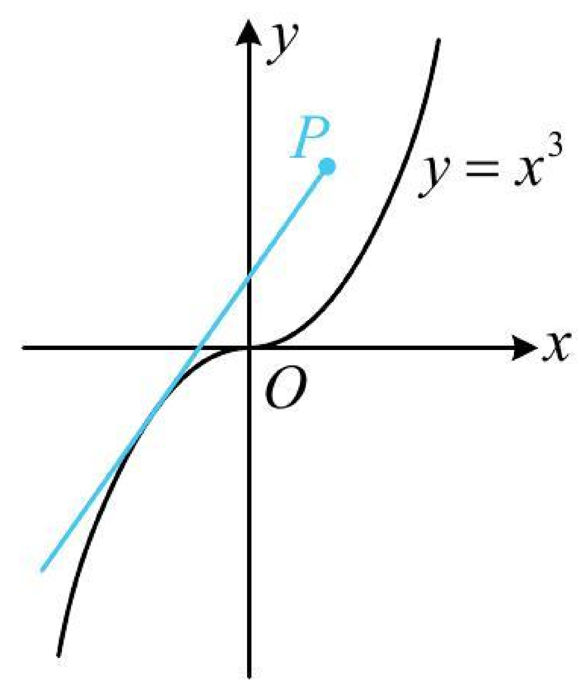


图2

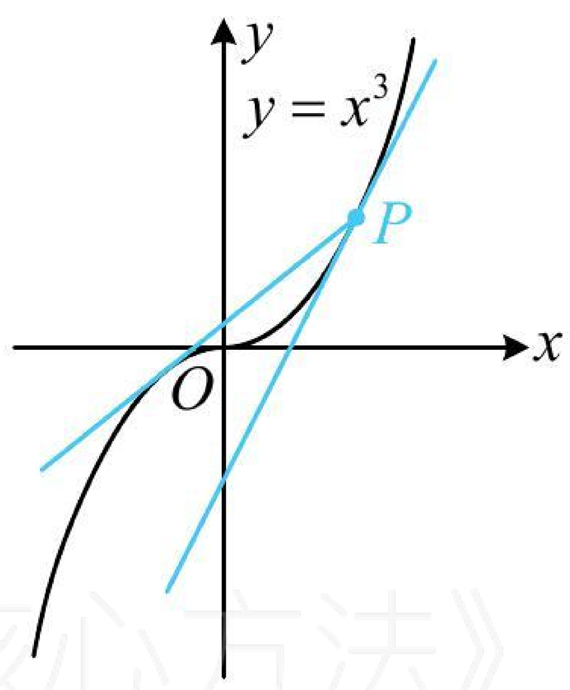


图3

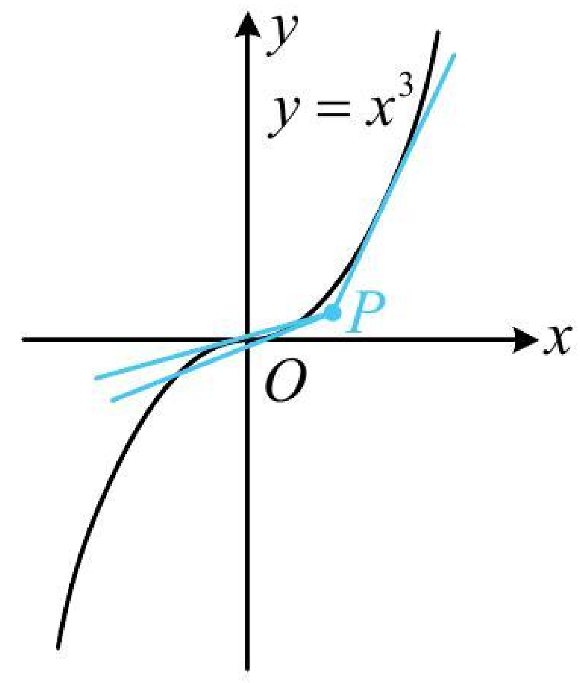


图4

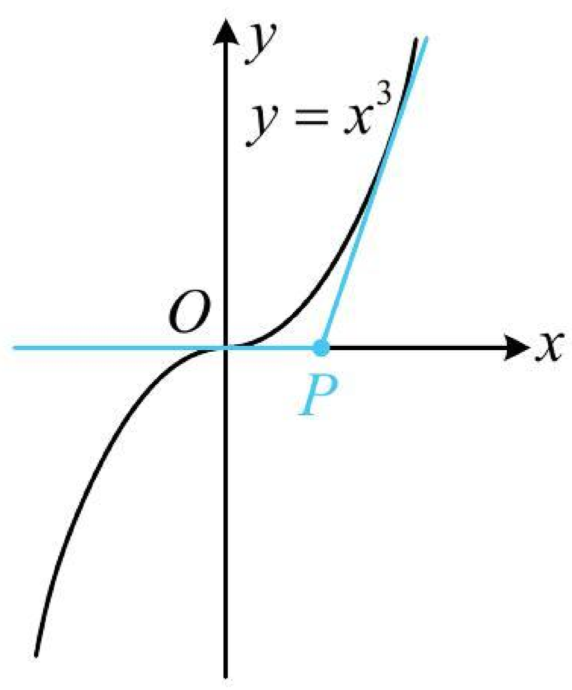


图5

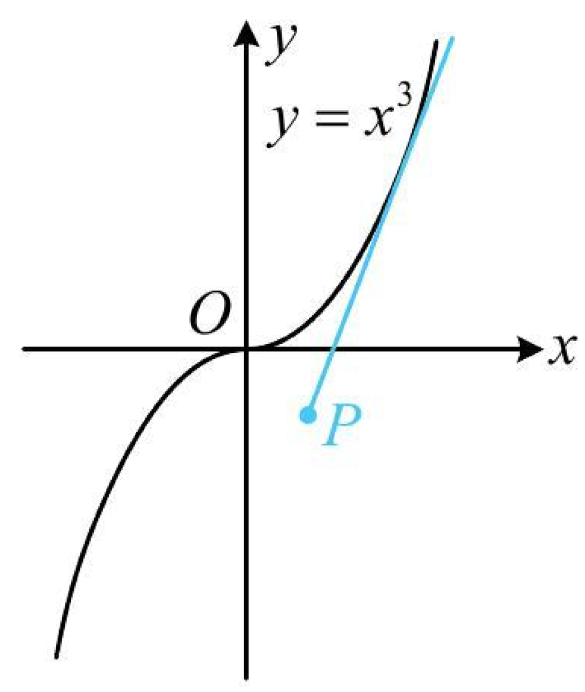


图6

【反思】对比两个解法会发现，解法 2 比解法 1 更直观，计算量更小，像这种研究过某点可作某函数图象几条切线的问题，若函数的图象较为简单，则画图分析往往是优越的解法.

10.（2022 • 金华期末 • ★★★★）已知函数 $f(x)=|\ln x|$ 的图象在点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线互相垂直且交于点 $P(x_0,y_0)$，则（　　）

（A）$x_1x_2=-1$　　（B）$x_1x_2=\mathrm{e}$　　（C）$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$　　（D）$x_0=\dfrac{2}{x_1+x_2}$

答案：D

解析：先画图看看两个切点的位置，如图，要使两切线垂直，则两个切点分别在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上，

因为 $f(x)=|\ln x|$，所以 $f(x)=\begin{cases}-\ln x,0<x<1\\ \ln x,x\ge 1\end{cases}$，故 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x},0<x<1\\ \dfrac{1}{x},x>1\end{cases}$，

不妨设 $P_1(x_1,-\ln x_1)$，$P_2(x_2,\ln x_2)$，且 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，

要寻找 x_1，x_2 的关系，可翻译切线垂直这一条件，

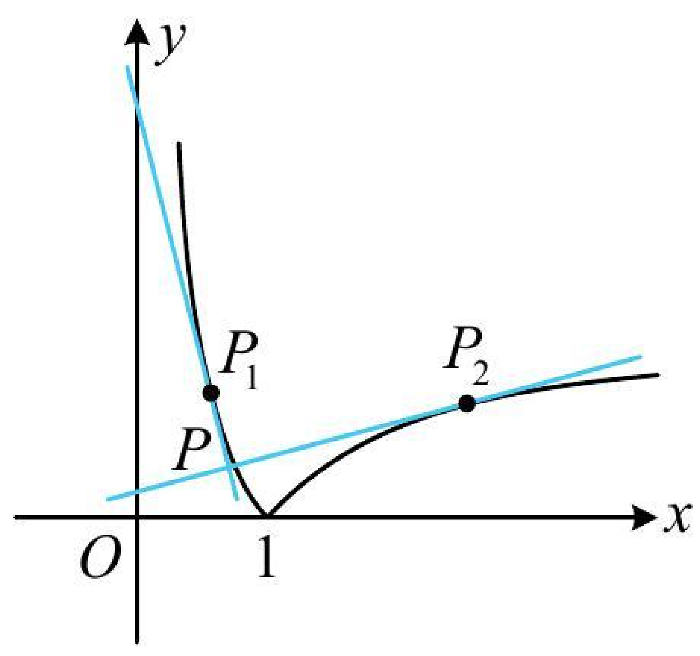
因为两切线互相垂直，所以 $f'(x_1)f'(x_2)=-\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=-1$，从而 $x_1x_2=1$，故选项 A、B 均错误；

要判断 C、D 两个选项，得求出两切线的交点 P 的横坐标 x_0，可写出两切线的方程，联立求解，

点 P_1 处的切线方程为 $y-(-\ln x_1)=-\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，整理得：$y=-\dfrac{1}{x_1}x+1-\ln x_1$ ①，

点 P_2 处的切线方程为 $y-\ln x_2=\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)$，整理得：$y=\dfrac{1}{x_2}x+\ln x_2-1$ ②，

联立①②解得：$x=(2-\ln x_1-\ln x_2)\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}$，结合 $x_1x_2=1$ 可得 $x=\dfrac{2}{x_1+x_2}$，即 $x_0=\dfrac{2}{x_1+x_2}$，故选 D.



11.（2023 •全国联考 •★★★★）若曲线 $y=x^2-1$ 与 $y=a\ln x-1(a>0)$ 存在公切线，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,2\mathrm{e}]$　　（B）$(0,\mathrm{e}]$　　（C）$[2\mathrm{e},+\infty)$　　（D）$(\mathrm{e},2\mathrm{e}]$

答案：A

解析：设公切线为 l，l 与两曲线的切点均未知，可设两个切点，分别写出切线 l 的方程，比较系数，

设两个切点分别为 $P(x_1,x_1^2-1)$ 和 $Q(x_2,a\ln x_2-1)(x_2>0)$，因为 $(x^2-1)'=2x$，$(a\ln x-1)'=\dfrac{a}{x}$，

所以曲线 $y=x^2-1$ 在点 P 处的切线为 $y-x_1^2+1=2x_1(x-x_1)$，整理得：$y=2x_1x-x_1^2-1$ ①，

曲线 $y=a\ln x-1$ 在点 Q 处的切线为 $y-a\ln x_2+1=\dfrac{a}{x_2}(x-x_2)$，整理得：$y=\dfrac{a}{x_2}x+a\ln x_2-a-1$ ②，

比较①②可得 $\begin{cases}2x_1=\dfrac{a}{x_2} & ③\\ -x_1^2-1=a\ln x_2-a-1 & ④\end{cases}$，有三个变量，要求 a 的范围，应反解出 a，并消去一个变量，

由③可得 $x_1=\dfrac{a}{2x_2}$，代入④整理得：$a=4x_2^2(1-\ln x_2)$ ⑤，

下面研究右侧的取值范围，直接求导也可行，但为了简化计算，将式⑤变个形并将 x_2^2 换元，

由⑤可得 $a=2x_2^2(2-\ln x_2^2)$，令 $t=x_2^2$，则 $t>0$，且 $a=2t(2-\ln t)$，

设 $f(t)=2t(2-\ln t)(t>0)$，则 $f'(t)=2(1-\ln t)$，所以 $f'(t)>0\Leftrightarrow 0<t<\mathrm{e}$，$f'(t)<0\Leftrightarrow t>\mathrm{e}$，

从而 $f(t)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上↗，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上↘，故 $f(t)_{\max}=f(\mathrm{e})=2\mathrm{e}$，又 $a>0$，所以 a 的取值范围是 $(0,2\mathrm{e}]$.